ПЛАН ИССЛЕДОВАНИЯ
по проекту Ивановой А.О.
«Строение и раскраска разреженных графов»
на конкурс Пьера Деліня и фонда «Династия»

1 Проведенные исследования

Раскраска графа в широком смысле есть разбиение дискретного объекта на более простые подобъекты. Ввиду своей общности, теория раскраски занимает в дискретной математике центральное место и имеет многочисленные приложения, особенно в информатике (распределение памяти, диагностика ошибок в программах и т. д.), задаче назначения частот в мобильном телефонировании, в теории расписаний и др. Например, изучаемая в диссертации Ивановой А.О. задача 2-дистанционной раскраски плоских графов является одной из важных моделей в проблеме распределения радиочастот в сетях связи (ПРР). Раскраска плоских графов — большая область исследования, выросшая из знаменитой проблемы четырех красок; в ней работают сотни специалистов.

Под разреженными графами понимаются графы, имеющие ограниченную сверху максимальную степень по подграфам, обозначаемую MAD. Известно, что для любого плоского графа $MAD < 6$, а например для любого плоского графа без 3-циклов $MAD < 4$. В свою очередь мерой разреженности плоского графа является его обхват g — минимальная длина цикла. Таким образом, теория разреженных графов включает в себя вопросы о плоских графах. Нетрудно показать, что если граф G плоский, то $MAD(G) \leq 2g(G)/(g(G) - 2)$. С другой стороны, в силу известной теоремы Эрдеша (1959) о раскраске случайных графов, существует (неплоский) граф G, имеющий произвольно большие $g(G)$ и $MAD(G)$.

Структурная теория плоских графов имеет более фундаментальное значение: сильные структурные результаты часто позволяют улучшить результаты по раскраске.

В 2004–2009 гг. А.О.Ивановой велась работа по теме данной заявки в трех направлениях:

(1) ориентированная, круговая и 2-дистанционная раскраски разреженных графов;

(2) игровая раскраска и реберные разбиения разреженных графов;

(3) вершинные разбиения разреженных графов.

Ниже описываются результаты, полученные по каждому из направлений со ссылками на файл PUBL.pdf.

Ориентированная, круговая и 2-дистанционная раскраски

Ориентированная раскраска

Ориентированная k-раскраска орграфа G есть ориентированный гомоморфизм из G в некоторый k-вершинный турнир H (мишень).Часто в качестве мишени используют известные в алгебраической комбинаторике турниры Пэли. Ориентированное хроматическое число $o(G)$ графа G может существенно отличаться от его хроматического числа. Например, существуют двудольные графы с произвольно большим ориентированным хроматическим числом (достаточно заменить каждое ребро полного графа K_n на путь длины 2. Курсель (1994) доказал, что $o(G) \leq 3^{63}$ для любого плоского графа G, а Нешетрил и др. улучшили этот результат до 80 с использованием ациклической 5-раскрашиваемости плоских графов, доказанной Бородиным в 1976 г. К 2005 г. были известны следующие результаты (Бородин, Вест, Ким, Косточка, Нешетрил, Ошам, Распо, Сопена): Пусть G — плоский граф обхвата $g(G)$. Тогда: (i) $o(G) \leq 59$ при $g(G) \geq 4$; (ii) $o(G) \leq 19$ при $g(G) \geq 5$; (iii) $o(G) \leq 11$ при $g(G) \geq 6$; (iv) $o(G) \leq 7$ при $g(G) \geq 8$; (v) $o(G) \leq 5$ при $g(G) \geq 13$ и (vi) существует плоский граф G_0 с $o(G_0) > 4$ и произвольно большим обхватом. В [25, 26, 19] получены оценки: $o(G) \leq 47$ при $g(G) \geq 4$, $o(G) \leq 7$ при $g(G) \geq 7$ и $o(G) \leq 5$ при $g(G) \geq 12$. При доказательстве первой из них был найден с использованием компьютера (машинные эксперименты заняли 1 месяц) ряд новых свойств турниров Пэли, в частности турнира P(47), которые (свойства) неожиданно оказались интересными для специалистов по алгебраической комбинаторике. Эти и подобные им еще более глубокие свойства турниров P(p) смогут помочь при получении новых результатов по ориентированным раскраскам. Наибольшее значение среди этих трех результатов имеет последний. Данный вопрос был поставлен в 1995 г. Бородиным и Косточкой. В доказательстве используется новая идея глобального перераспределения эйлеровых вкладов, не встречавшаяся до сих пор в работах по плоским графам. (Хотя она теоретически ничему не противоречит, реализовать ее ранее не удавалось.)

Круговая раскраска (гомоморфизм на цикл)

В [15] доказано, что любой плоский граф обхвата не менее 12 допускает гомоморфизм на цикл C_5. Ему предшествовали более слабые результаты зарубежных авторов, которые мы здесь перечислять не будем. Ориентированная раскраска тесно связана с так называемыми антисимметрическими потоками, а круговая — с известной гипотезой Жеже (1981) о круговых потоках. Фундаментальную связь между потоками и раскрасками установил Татт в 1954 г.: плоский граф имеет k-поток если и только если двойственный к нему граф k-раскрашиваем. В свою очередь, гипотеза Жеже является усилением знаменитой гипотезы Татта о 5-потоке. Ослабленный вариант гипотезы Жеже состоит в том, что каждый плоский граф обхвата не менее 8 имеет круговую 5-раскраску (при обхвате 7 известны примеры графов, не допускающих круговой 5-раскраски). Таким образом, дальнейшие усилия исследователей будут направлены на доказательство круговой 5-раскрашиваемости плоских графов с обхватом от 11 до 8. В этой работе будет полезна доказанная в [15] лемма о «мягком» цикле, поскольку она верна для графов произвольного обхвата и накладывает существенные ограничения на структуру минимального контрпримера.

2-дистанционная раскраска

Вторая группа результатов работы посвящена 2-дистанционной раскраске плоских графов и ее обобщениям, (p,q)- и предписанной (p,q)-раскраскам. Этот вид раскраски изучается в теории графов с конца 70-х годов; он интересен как сам по себе, так и своими приложениями. В частности, одной из основных моделей в проблеме распределения радиочастот (ПРР) в сетях мобильного телефонирования является (p,q)-раскраска. Вершины плоского графа (источники) должны быть раскрашены (получить частоты) так, чтобы цвета вершин (целые числа) на расстоянии 1 различались не менее чем на p, а на расстоянии 2 — не менее чем на q. Здесь $p \geq q$, т.к. частоты близко расположенных источников должны различаться сильнее ввиду интерференции волн (при $p = q = 1$ имеем 2-дистанционную раскраску). Иногда в ПРР каждый источник имеет свой собственный набор разрешенных частот, т.е. возникает известная в теории графов задача предписанной раскраски.

В [4, 7, 16, 21–24, 28, 29, 32] получен ряд результатов по этой теме. В частности, получены достаточные условия (в терминах максимальной степени Δ), при которых 2-дистанционное хроматическое число графа достигает своей тривиальной нижней границы $\Delta + 1$ (в [29] показано, что при $g = 6$ эта оценка может не достигаться), а также даны верхние оценки в задачах (p, q)- и предписанной (p, q)-раскраски плоских графов с заданным обхватом, отличающиеся от нижних лишь на величину, не зависящую от главного члена, p.

Приведем лишь один конкретный результат. В работе [Z.Dvorak, D. Kral', P. Nejedly, R. Skrekovski, Coloring squares of planar graphs with girth six, European Journal of Combinatorics, 29, 4 (2008) 838–849] было доказано, что каждый плоский граф с $g \geq 6$ и $\Delta \geq 8821$ 2-дистанционно $(\Delta + 2)$-раскрашиваем. В [7] и [32] доказано, что каждый плоский граф с $g \geq 6$ предписанно 2-дистанционно $(\Delta + 2)$-раскрашиваем при $\Delta \geq 24$ и 2-дистанционно $(\Delta + 2)$-раскрашиваем при $\Delta \geq 18$.

Игровая раскраска и реберные разбиения

Рассматривается задача раскраски графов при наличии противодействующего фактора, которая лежит на стыке теории графов с теорий игр и служит моделью для получения верхних оценок для более общей ситуации противоборства при оценке параметров графа. Поясним суть дела.

Минимальная раскраска строится поочередно двумя сторонами, одна из которых («хорошая») стремится минимизировать число цветов (ход состоит в допустимой раскраске любой из еще не окрашенных вершин), а другая («нехорошая») затрудняет задачу первой, крася очередную вершину «невпопад». В частности, на произвольном дереве так определенное игровое хроматическое число может достигать 4, тогда как обычное, как известно, не превосходит 2.

Игровое хроматическое число графа (ИХЧ) – это то минимальное число цветов, в которое «хороший» игрок сможет покрасить граф при любом сопротивлении оппонента. Известно, что ИХЧ любого графа оценивается сверху максимальной высотой его ребра (МВР), чисто структурной и легко вычислимой характеристикой графа. Точнее, через МВР графа G сначала оценивается максимальная степень подграфа H в разбиении ребер графа G на лес F и граф H.

Приведем пример такого результата. Если в плоском графе с минимальной степенью не меньше 2 нет циклов длины 4, то в нем найдется ребро, степени обеих концевых вершин которого не превосходят 7, причем оценка неулучшаема. Заметим, что при наличии 4-циклов каждое ребро может быть инцидентно вершине сколь угодно большой степени (как в полном двудольном графе $K_{2,n}$).

В [1,5, 14, 17, 18]: (1) опровергнута гипотеза Хи, Ху, Ли, Шао, Ванга и Жу (2002) о том, что каждый плоский граф максимальной степени Δ допускает реберное разложение на лес и подграф максимальной степени не больше $\lceil \Delta/2 \rceil + 1$; (2) найдены точные верхние оценки минимальной высоты ребра в нескольких классах графов, вложимых в поверхности с неотрицательной эйлеровой характеристикой, при запретах на циклы тех или иных длин; (3) усилен ряд ранее известных результатов по разложению плоских графов на лес и подграф ограниченной степени, что позволило улучшить известные верхние оценки для игрового хроматического числа таких графов.

Вершинные разбиения

Большое место в теории графов занимает такое обобщение правильной раскраски, как разбиение вершин графа на подграфы в том или ином смысле простой структуры (не обязательно безреберные, как в случае правильной раскраски).

Согласно знаменитой теореме Аппеля и Хакена все плоские графы 4-раскрашиваемы. В то же время известно, что не все плоские графы допускают предписанную 4-раскраску (когда множество допустимых цветов имеет мощность 4, но может меняться от вершины к вершине) и не все они допускают покрытие двумя индуцированными подграфами без циклов (лесами). Напомним, что каждый лес легко красится в 2 цвета.

В [7,8,10,12] даны достаточные условия предписанной 4-раскрашиваемости и (обычной) 2-древесности плоских графов: (1) запрет на треугольные 4-циклы либо (2) отсутствие 3-циклов на расстоянии меньшем 2 друг от друга. При запрете на все 4-циклы, а также при выполнении условия (2), эти результаты перенесены на более общий случай покрытия вершин плоского графа индуцированными подграфами переменной вырожденности, что перекрывает случай предписанной 2-древесности.

А именно, для любой вектор-функции $(f_1, f_2, \ldots, f_s)$, заданной на множестве вершин G, и такой, что $f_1(v) + f_2(v) + \ldots + f_s(v) \geq 4$ и $f_i(v) \in \{0, 1, 2\}$ для любых $i = 1, 2, \ldots, s$ и вершины v, граф G является $(f_1, f_2, \ldots, f_s)$-разложимым. Это означает, что существует разбиение $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_s$ множества вершин G такое, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$ подграф в G, порожденный множеством вершин V_i, является f_i-вырожденным.

Тем самым усилен или обобщен ряд ранее известных результатов в этой области (Лам, Ксу, Шу, Лю, Распо и др.).

В [3] доказано, что любой граф G с $MAD(G) < 7/3$, и в частности, плоский граф с $g \geq 14$, можно разбить на два подграфа G_1 и G_2 так, что $\Delta(G_1) = 0$, а $\Delta(G_2) \leq 1$, что усиливает результат Глебова и Замбалаевой (2007) с $g \geq 16$.

Далее в [34] был получен более общий результат: при $k \geq 2$ любой граф G с $MAD(G) < \frac{3k+4}{k+2}$ можно разбить на два подграфа G_1 и G_2 так, что $\Delta(G_1) = 0$, а $\Delta(G_2) \leq k$, причем построен граф G с $MAD(G) < \frac{3k+4}{k+2} + \frac{1}{k+3}$, не допускающий такого разбиения. Отметим, что доказательство в [34] не работает при $k = 1$.

2 Проект будущих исследований

В ближайшие два года большая работа предстоит по темам, описанным выше, а кроме того, имеется задел по ациклическим раскраскам разреженных графов, в частности плоских. Планируется завершить написание статей [35]–[43], включая шлифовку доказательств в некоторых из них, и сдать их в печать. Ожидается, что к концу 2010 г. будут получены следующие результаты:

(1) доказано, что любой плоский граф обхвата не менее 11 допускает круговую 5-раскраску, что явится шагом в направлении гипотезы Жеже о векторнозначных

потоках;

(2) улучшены известные верхние оценки для 2-дистанционного хроматического числа плоского графа в терминах максимальной степени вершин и обхвата графа, в частности, при $g \geq 5$ и достаточно больших Δ будет доказана точная верхняя оценка $\Delta + 2$, т.е. решена проблема, поставленная Бородиным и Ивановой и, независимо, Дворжаком и др. (отметим, что при $g \leq 4$ существуют плоские графы, не допускающие 2-дистанционной раскраски даже в $3\Delta/2$ цветов);

(3) найдена точная верхняя оценка (в терминах Δ) для минимального веса окрестности 5-вершины в плоских триангуляциях с минимальной степенью 5;

(4) доказана верхняя оценка $2\Delta - 1$ для реберного 2-дистанционного хроматического числа разреженных плоских графов (эта оценка достижима на любом графе, содержащем две смежные вершины степени Δ); как в предписанном варианте, так и в обычном;

(5) найдены новые достаточные условия разбиваемости вершин разреженного графа: (а) на два леса и (б) на два пути ограниченной длины;

(6) завершено доказательство разбиваемости вершин достаточно разреженного графа на два подграфа с максимальными степенями k и j и сделана попытка обобщить этот результат на случай произвольного числа подграфов;

(7) доказана предписанная ациклическая 3-раскрашиваемость плоских графов: (а) с обхватом 7 и (б) без циклов длины от 4 до 11, что усилит результаты Бородина, Косточки и Вудала (2002), Монтасьера (2007) и Бородина, Монтасьера (2009);

(8) доказана предписанная ациклическая 4-раскрашиваемость плоских графов: (а) без 4- и 5-циклов и (б) без 4- и 6-циклов, каждый из которых является совместным усилением ряда зарубежных результатов;

(9) найдено достаточное условие предписанной ациклической 5-раскрашиваемости плоских графов в терминах запретов на смежность коротких циклов, что также усилит ряд зарубежных результатов.

3 Преподавательский опыт и педагогические планы

В Якутском госуниверситете я работаю по совместительству доцентом кафедры алгебры и геометрии, где читаю обязательные курсы лекций по алгебре и линейной алгебре, а также спецкурс по теории графов.

соискатель, к.ф.-м.н., зав. сектором
дискретной математики и геометрии
ФГНУ «НИИ математики при ЯГУ» А.О.Иванова
13.10.09